地籍測量
第 35 卷第 3 期，第 1-5 頁，民國 105 年 9 月
Journal of Cadastral Survey
Volume35, Number 3, Sep, 2016,1-5

～～～～～
技術報告
～～～～～

無多餘觀測下各種平面位置解算法關聯圖之編製[2]

莊惠群 [1]

摘要

測量上以坐標幾何（Coordinate Geometry）解析測點位置，包括夾角距離法、截距法、交弧法、前方交會法、側方交會法……；教科書將這些方法或編為專章，或分置於相關單元，然多未闡述其關聯性，各種方法每每成為獨立而片段的知識。本文編製無多餘觀測下各種平面位置解算法關聯圖，以夾角距離法為樞紐，搭配相關運算建立連結，架構解析平面位置之整體觀念，可供授課、自學時參考使用。

關鍵字：坐標幾何。

一、以坐標幾何解析平面位置

測量實務上根據相關數據與坐標幾何（Coordinate Geometry）解析測點位置，就處理平面點位而言，外業數據為夾角、距離兩類觀測量，而可選擇之方法包括夾角距離法、截距法、交弧法、前方交會法、側方交會法……。本文僅討論無多餘觀測時，解析測點位置所應用之坐標幾何，並分析各種方法間之關聯性；對於需平差之閉合導線、附合導線、導線網、三角網、角邊網……，暫且略過。

二、各種方法分置教科書各處

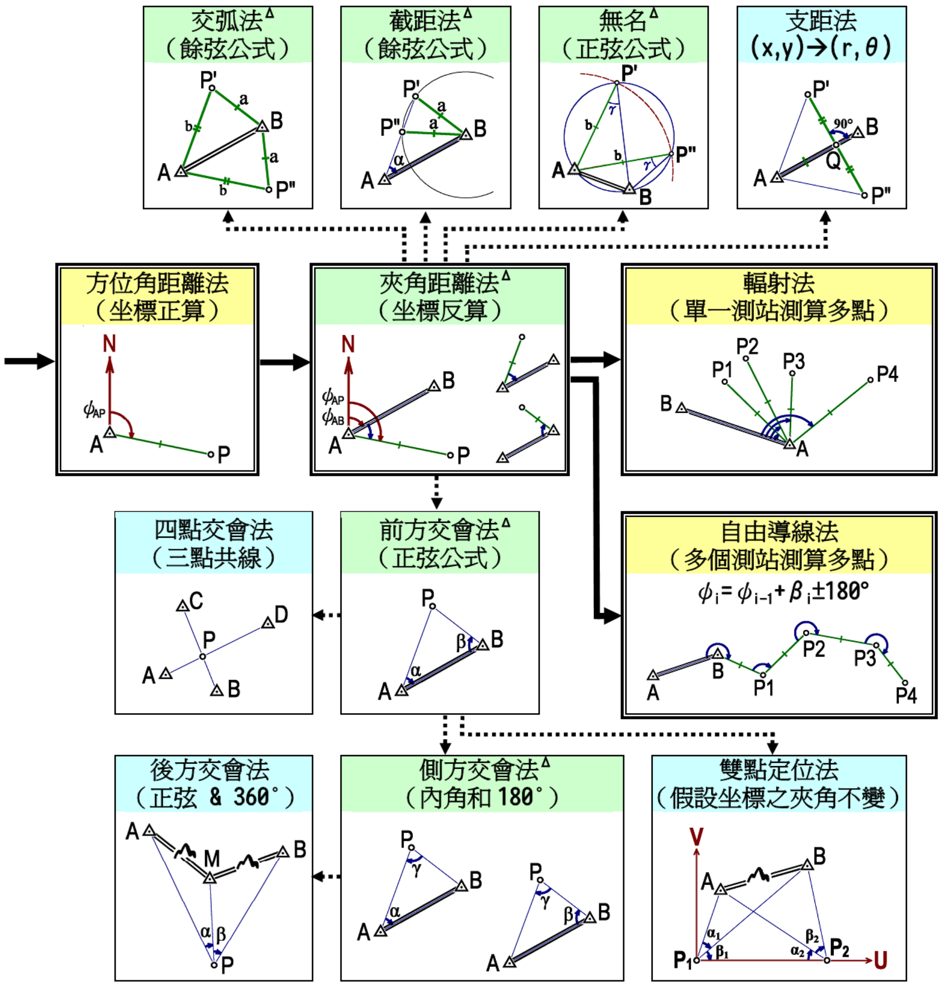
或許因為闡述相關學識與介紹儀器所需，高職測量實習之課程綱要（教育部，2008）與多數教科書，如測量學（施永富，2012），並未彙整各種解算法於專章，使得內涵相近之各種方法，卻似互不相關般散居多處。例如前方交會法與夾角距離法皆有相同之已知點、未知點和兩個觀測量，相異者僅是夾角與距離的不同組合，但前方交會法卻常置於測量教學之中後段章節，成為另一段獨立之學習單元。

三、具關聯性之多種角距組合

即使部分教科書將座標幾何編為專章（Ghilani，2012），但並未闡述其關聯性，各種方法成為多個獨立片段的知識，學習上不易聯想貫通。因此本文分析各種解算法間之關

[1]正修科技大學土木與空間資訊系　講師
[2]本文曾於105年8月25日在第35屆測量及空間資訊研討會口頭發表

聯性編製成圖，以夾角距離法為樞紐，搭配相關運算建立連結，架構一體之坐標幾何觀念。學習核心為掌握夾角距離法，瞭解各種方法間同異處，轉化出相同觀測量代入套用得解，各種角邊組合皆一以貫之。



四、生源多樣講授可另闢蹊徑

隨著人口出生率降低，各級學校招生日趨困難，教育部適時擴充招生管道，鬆綁普通大學可招收高職畢業生；技專校院除高職對應類群外，亦可跨類群，甚至招收高中畢業生（本系四技日間部生源包括高職土木建築群、機械群、設計群、電機電子群和高中普通科）。面對學識背景迥異之學生，若依循現行高職課綱或教科書之內容施教，或將不易獲得土建群畢業生青睞，教師講授時可考慮另闢蹊徑。

五、基礎幾何（正弦、餘弦、一元二次解）

平面幾何之運算，常使用正弦公式、餘弦公式，求解時需注意計算機之 $\sin^{-1}$、$\cos^{-1}$ 函數僅顯示兩解之一，如同 $\sqrt{9}$ 僅得 +3。在使用餘弦公式時，某些狀況可能轉為 $y = ax^2 + bx + c$ 之一元二次方程式，其標準解為 $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$。

【例1】三角形邊長 $a=\overline{BC}=187.939\text{m}$，$b=\overline{AC}=100.000\text{m}$，∠B=30°，求 $c=\overline{AB}=?$

【解1】

<1> 正弦公式解法： $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}=\dfrac{c}{\sin\angle C}$

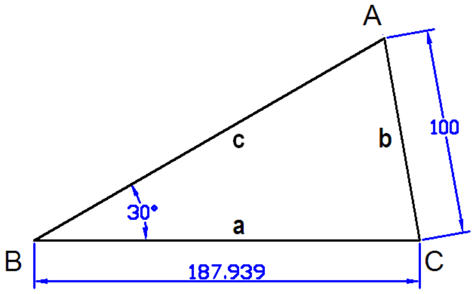
<a> $\sin\angle A=\dfrac{a}{b}\cdot\sin\angle B=0.939695$

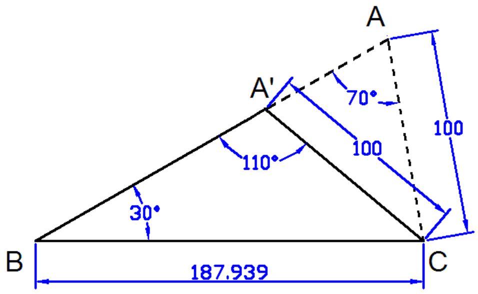
<b> ∠A=$\sin^{-1}$(0.939695)=70°， ∠C=180°-∠A-∠B=80°，

$$c=\sin\angle C\cdot\frac{b}{\sin\angle B}=\sin 80^\circ\cdot\frac{100}{\sin\angle 30^\circ}=196.962\text{m}$$

<c> $\sin^{-1}$ 之另解為 ∠A=110°， ∠C=180°-∠A-∠B=40°，

$$c=\sin\angle C\cdot\frac{b}{\sin\angle B}=\sin 40^\circ\cdot\frac{100}{\sin\angle 30^\circ}=128.558\text{m}$$





<2> 餘弦公式解法：

以 $b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos\angle B$，套用一元二次方程式，直接求出c= $\overline{AB}$ 的兩解

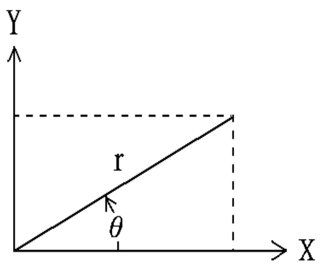
$$c^2-2a\cdot\cos\angle B\cdot c+(a^2-b^2)=0 \qquad c^2-325.520*c+25321.068=0$$

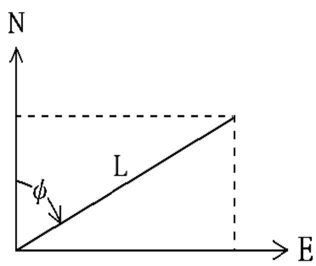
此即一元二次方程式 $x^2-325.520*x+25321.068=0$

$$c=\frac{325.520\pm\sqrt{(-325.520)^2-4*1*25321.068}}{2*1}=196.961\text{m} \text{ 與 } 128.559\text{m}$$

六、坐標解算（正算、反算、二元一次解）

直角坐標與極坐標間之轉換為 (r,θ)→(x,y) 和 (x,y)→(r,θ)，而測量上採用以縱軸為基準之(N,E)坐標和方位角 ϕ，與直角坐標間之轉換為 (L,ϕ)→(ΔN,ΔE) 和 (ΔN,ΔE)→(L,ϕ)。此運算可用工程用計算機之函數鍵直接取得，測量上將其應用於坐標正算與反算，求出相關測線之縱距、橫距、距離、方位角。





平面坐標包括(x,y)兩未知數，若能列出兩方程式，即可代入二元一次方程式求解；而

每個角度或距離觀測量皆可列出一個方程式，所以單個未知點只需兩個有效之觀測量即可解算。

核心樞紐（方位、距離、夾角距離法）

此關聯圖由左側箭頭方向進入方位角距離法，相應幾何為坐標正算，標示於該方塊名稱下之括弧內。測算時，取得已知點往未知點之方位角與距離，即可解出未知點坐標；而測設時，則在已知點整置儀器，以方位角標定方向並搭配距離取得未知點位置。如『龜山島/未知點』位於『宜蘭市/已知點』『東北東方/方位角』『20公里/距離』，即為方位角距離法之描述。相應數學式如下：

$$E_P = E_A + \Delta E_{AP} = E_A + \overline{AP} \cdot \sin\phi_{AP} \qquad N_P = N_A + \Delta N_{AP} = N_A + \overline{AP} \cdot \cos\phi_{AP}$$

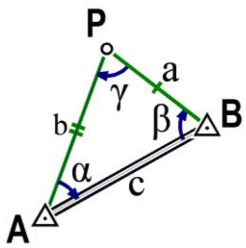
續依照關聯圖箭頭方向進入夾角距離法：因為實務上取得同等級精度之方位角較夾角為難，所以在第一個已知點（測站）之外，另覓得第二個已知點（後視點），測得夾角（後視點~測站~未知點）和距離（測站~未知點）後，先用坐標反算求出後視方向之方位角 ϕ_{AB}，加上夾角得 $\phi_{AP} = \phi_{AB} + \angle BAP$，即可套用方位角距離法求解。由於新增加之主要數學式為坐標反算，所以標示於該方塊名稱下之括弧內為『坐標反算』。

$$\phi_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta E_{AB}}{\Delta N_{AB}}\right) + C \quad \text{（C=0°, 180° or 360°）}$$

七、測算多點（定站、移站、輻射與導線）

需要處理多個未知點時，可重複使用夾角距離法，並依照測站位置，分成固定測站之輻射法與移動測站之導線法。輻射法在單一測站測角、測距，以固定之兩已知點搭配個別未知點，成為多組夾角距離法而得以解算；導線法則於多個點位測角、測距，以前一組夾角距離法求得之未知點坐標為已知點，依序組成新一組夾角距離法解算之。

八、單三角形（測角、量距、共十種組合）



參考國考試題：在兩已知點搭配一未知點之單三角形中，不計基線 $c = \overline{AB}$，尚有5個觀測量（$\alpha, \beta, \gamma, a = \overline{BP}, b = \overline{AP}$），而解算未知點座標 ($N_P$, E_P) 需要兩個觀測量，所以角距共有 $C_2^5 = 5!/(2!*3!) = 10$ 種組合。分別為夾角距離法($\alpha + b$、$\beta + a$)、截距法($\alpha + a$、$\beta + b$)、交弧法($a + b$)、前方交會法($\alpha + \beta$)和側方交會法($\gamma + \alpha$、$\gamma + \beta$)，而剩下之兩種組合為 $\gamma + a$、$\gamma + b$。

104年高員三級鐵路人員考試　　類科別：土木工程　　科目：測量學
一、近似正三角形的兩個頂點為平面控制點，第三點為待定縱橫坐標之頂點；此外，凡點對間通視無虞。技術上測角或測距皆可，利用任兩個觀測量即足以進行平面前方交會或側方交會之演算。試配合簡易圖示，說明所有可能的觀測量組合方式。（20分）

由關聯圖樞紐夾角距離法可連結單三角形其他5種解算法，處理方式皆為將之轉化出

夾角距離法觀測量$\alpha+b$（或$\beta+a$）：

交弧法已有$b=\overline{AP}$，藉餘弦公式解算α；

截距法已有α，藉餘弦公式解算$b'=\overline{AP'}$、$b''=\overline{AP''}$；

無名法已有$b=\overline{AP}$，藉正弦公式解算β'、β''，以內角和180°計算α'、α''；

前方交會法已有α，藉正弦公式解算$b=\overline{AP}$；

側方交會法以內角和180°補齊α與β，代入前方交會法計算。

在6種解算法中，關聯圖上方之交弧法、截距法、無名3法，都有P'、P"兩解。

九、外擴延伸（支距、共線、雙點與後方）

關聯圖中尚有夾角距離法衍生的支距法，藉(x,y)→(r,θ)求得$\alpha=\theta$與$b=r$；前方交會法衍生之四點交會法，藉$\alpha=\phi_{AB}-\phi_{AD}$、$\beta=\phi_{BA}-\phi_{BC}$轉化為前方交會法，或是以兩組三點共線式解聯立；而雙點定位與後方交會法則分別藉假設座標夾角不變、正弦公式和幾何解算轉化為前方交會法與側方交會法。

十、結論與建議

本文彙整各種平面位置解算方法，剖析其間之關聯性，並編製學習流程圖，具有下述優點：

1. 彙整各種方法於一處，組成整體論述，便於閱讀。
2. 剖析各種方法關聯性，建構幾何觀念，便於理解。
3. 編製循序漸進流程圖，內容由淺入深，便於學習。
4. 提供另一種教學順序，適應多樣生源，便於授課。

建議教師參酌本文所述，將此關聯圖納入教材之參考資料，盼能有助於建構學生完整之坐標幾何觀念。

參考文獻

1.施永富，2012，*測量學*，三民書局，第一章 緒論、第五章 坐標測量、第六章 導線測量、第七章 平面三角測量。

2.教育部，2009，*土木與建築群課程綱要-測量實習ⅠⅡ*，職業學校群科課程綱要，231-238頁。

3.Charles D. Ghilani, 2012. *Elementary Surveying: An Introduction to Geomatics,* PEARSON, chapter 7. ANGLES, AZIMUTHS, AND BEARINGS, chapter 11. COORDINATE GEOMETRY IN SURVEYING CALCULATIONS.