地籍測量
第 34 卷第 3 期，第 17-25 頁，民國 104 年 9 月
Journal of Cadastral Survey
Volume34, Number 3, Sep, 2015,17-25

有幾個三角形?
How Many Triangles?

史天元[1]　余珮瑄[2]

摘　要

最近娛樂新聞中，有個圖形遊戲的問題，引發廣泛的關注，在電視節目中，藉由訪談，已有部分的解答。但是究竟有幾個三角形呢？其實，由不同的定義與原理審視，答案並不相同。本文之目的在提供以圖論為基礎的觀點所探討的成果。在空間資訊的應用中，「位相」(Topology)的分析，即是以此為發展基本之作業方法。故而，此一議題，應不只有遊戲的層面，還有實際上應用的潛勢。

究竟有幾個三角形呢？由圖形遊戲的觀點，目前電視節目中訪談所得答案是 24 個。但是如果包涵零面積之三角形，應有 46 個。而由位相理論看，答案則一個也沒有或只有一個。若將所有交點均視為節點(Node)，所有的其間線段均視為「邊」(Link, Arc, Edge，連接、弧)，則有 5 個、或 6 個。

Abstract

There is a game of graphics attracted public attention and has been reported in TV news in March, 2015. Through interview with math teachers, a partial solution to this game was revealed in the news. But, "How many triangles are in the figure"? The resulting solution differs with the definition. This writing intends to provide a view from graph theory. In the spatial analysis of Geographic Information Systems (GIS), "topology" provides a suite of fundamental tool, which is largely based on graph theory. Subsequently, the subject of graphics is not only having entertainment meaning, but also potential for practical application.

"How many triangles are in the figure"? From the view of an entertaining game, the answer is 24 as provided in the TV interview. But, if the triangles with zero area were counted, the answer would be 46.　From topological view, there is either no triangle or one. If all the intersections in the figure are taken as node and all line segments between them are taken as edge (link, arc), the answer would be either 5 or 6.

一、前　言

圖形是一個有趣的議題，「隱藏式」的圖形更常引起人注意，由於有動腦的特性，常歸類為益智型，往往成為遊戲的主題。本人尚未查證最近(104 年 3 月)媒體上所引

[1] 國立交通大學土木工程系　教授；tyshih@mail.nctu.edu.tw
[2] 國立交通大學土木工程系　碩士生

發討論圖形遊戲(如圖 1)的起源，但這應是一個典型的具有隱藏式圖形的題目，而且此類型的題目甚至此題應已有長久的歷史。由圖 1 可觀察得，這個圖形繪製時，可以由七個長直線線段構成，線段彼此具有交點。本文先以圖形遊戲之角度出發，探討此一命題答案，再以排列組合方式討論，最後由「位相」理論探討。

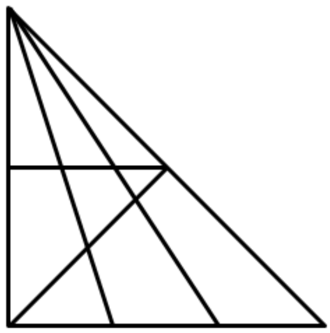
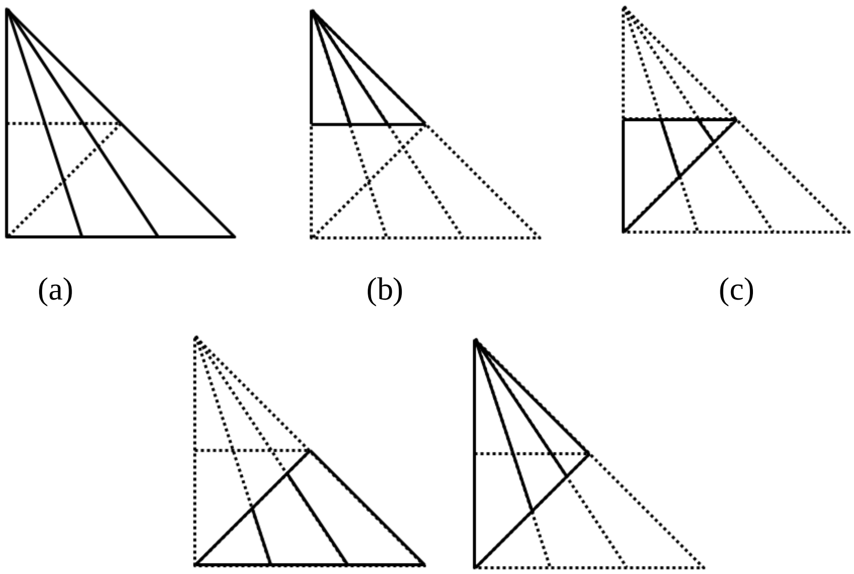


圖 1 「有幾個三角形」圖形

二、圖形遊戲的分析

由圖形遊戲角度的分析，圖 1 中的圖可以拆分成圖 2 中的五個子單元。其中，第(a)、(b)、(e)三個子單元具有相似性，均可各找出 6 個三角圖形，以(a)為例，分解如圖 3。而圖 2 中之(c)、(d)則具有相似性，均可各找出 3 個三角形，如圖 4。因此，「有幾個三角形?」的答案是這些的和：(6+6+3+3+6) =24。



(a) (b) (c)

(d) (e)

圖 2　圖 1 之子單元

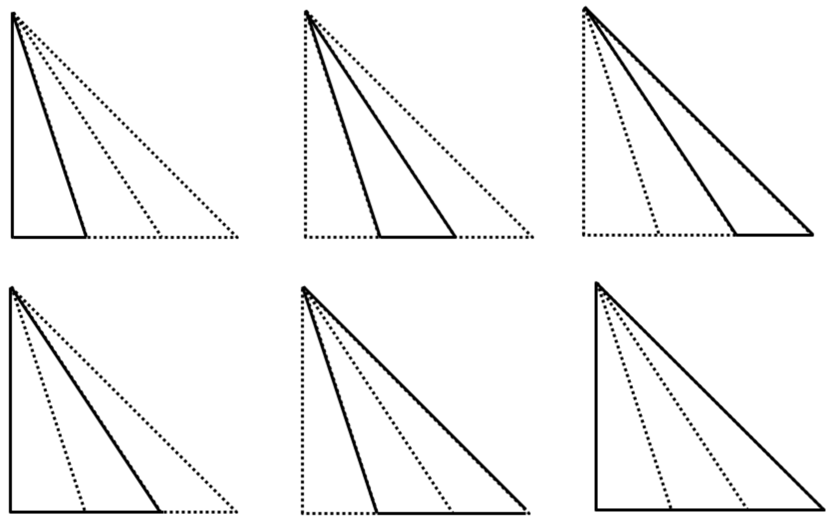


圖 3 圖 2(a)之分解

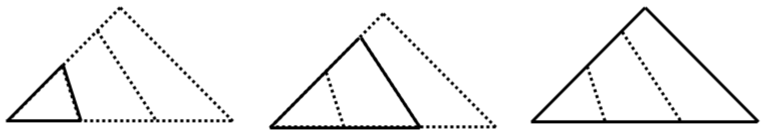


圖 4　圖 2(d)之分解

三、排列組合的探討

以上所述是採用圖形遊戲解題時的經典作業方式:「分解」。若由排列組合的方式著手，是否可更系統化呢？若命題是有 n 個點，由此 n 個點取任意不重複的 3 個點構成三角形之可能組合數目是 C(n, 3)。如果有 3 個點，C(3, 3)=1；如果有 4 個點，C(4, 3)=4，如圖 5 所示；如果有 5 個點，C(5, 3)=20。

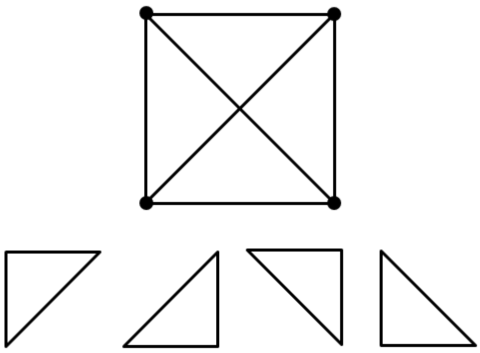


圖 5　4 點構成之三角形

在圖 1 的圖形中，共有 11 個點，則

$$C(11,3)=\frac{11!}{(11-3)!\ 3!}=\frac{11!}{8!\ 3!}=165$$

這明顯地與前節的答案不符，原因很簡單。首先，在圖 1 中並非所有「交點」之間均有連接。如果各交點編號如圖 6，則可觀察到點 2 與點 5、6、7、10、11 均沒

有連接，所以圖形上無法構成三角形所需要的邊，點 5 與點 9、3、11 也沒有連接，還有其他的組合。因此，直接由頂點數目，進行排列組合計算，無法計算出圖 1 命題圖形中隱藏的三角形數目。而若由邊的排列組合計算，一樣的困難重重。因為，除了辨識有多少個邊是個問題外，兩個邊是否共點，亦須考慮。但是在分解後的子圖形分析中，排列組合的計算是可以應用的。如圖 3 中的分解，總共有六種選擇。如果由點 1 計算該點共點之邊數，由其中任取兩個不重複的邊，有 C(4, 2)個組合，其值為 6。

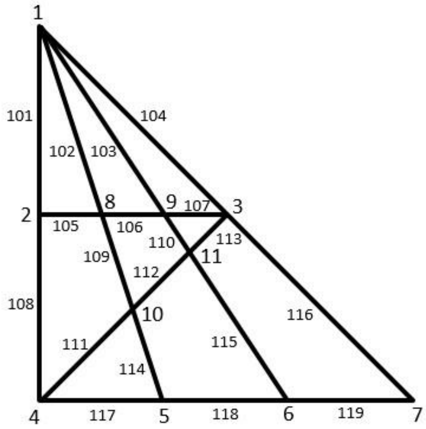


圖 6　圖 1 中的所有交點

不過由圖 6，另一個觀察，可能更發人深省：「Δ124 是否是個三角形呢」?單純由組合方式計算，三角形數目中是包含這些成一直線三點的組合。如果三角形的定義就是有三個頂點與其連接的邊，則Δ124、Δ289、Δ893、Δ293，均是三角形。因為，在數學遊戲的命題中，並未排除「面積為零」的三角形。如果要如此定義，則圖形中隱藏的三角形，還要包括這些真正「隱藏」的三角形。圖 6 中三點共線的有二組，分別為(1, 2, 4)與(1, 3, 7)；四點共線的有五組，分別為(1, 8, 10, 5)、 (1, 9, 11, 6)、 (2, 8, 9, 3)、(3, 11, 10, 4)、(4, 5, 6, 7)。依據組合計算，三點共線的組合數為 C(3,3)，只有一個三角形，四點共線的則有 C(4, 3)，計四種，合計有 22 個面積為零的三角形，所以「有幾個三角形?」的答案是 24+22=46。

四、位相觀點的答案

在前節的討論中，已提到幾個觀點，如定義、節點、零面積三角形等，顯現出這個圖形遊戲，其核心的問題在於定義。如果跳脫娛樂的限制，圖 1 是一個定義不明確的命題。因此答案是不唯一的。

「位相」(Topology)是地理資訊中空間分析的基本作業方法。在初期的「地理資訊系統」定義中，是否具有位相，曾是判定該系統是否為「地理資訊系統」的檢驗標準。藉由「位相」的分析，空間關係可以有系統的歸納、了解。例如，應用歐拉(Euler)等式，可以提供驗證多邊形、邊(弧)、節點(頂點)，數目間的關係(史天元，1995)。

「位相」是什麼呢?「空間資訊」中的「位相」分析，常應用源自於圖論(Graph

Theory)的原理。依此基礎思考架構，「三邊形」是「多邊形(Polygon)」的一種，而多邊形是由節點(Node)與邊(Edge)所組成的。「節點」又有稱為「頂點」(Vertex)，「零維單元」(Zero Cell)者，「邊」有稱為「連接」(Link)、「弧」(Arc)、「一維單元」(One Cell)者。可是這些名詞的使用可能有其特定的情境，例如「零維單元」、「一維單元」、「二維單元」(Two Cell)分別對應點、線、面，但是通常使用於網面(Tessellation)中(Laurini and Thompson, 1994)。而「弧」通常指具有方向之邊(Directed Line)(Chang, 2014)。

多邊形為具封閉性之圖形，其間不可有任何節點或邊。依據 Street and Wallis (1982)的定義：

「多邊形，乃指一個由一個邊或多個邊所封閉而成的一塊區域。在此區域內不含任何其他的邊。」

在進一步討論之前，或許應先描述一下「圖論」中的「圖」是什麼? 依據維基百科(2015)，

「圖論中的圖是由若干給定的頂點及連接兩頂點的邊所構成的圖形，這種圖形通常用來描述某些事物之間的某種特定關係，用頂點代表事物，用連接兩頂點的邊表示相應兩個事物間具有這種關係」。

而計算圖形數目之前，有另一個基本的定義要決定。簡單的圖像化這個命題，就是:「圖 7 中有幾個多邊形？」

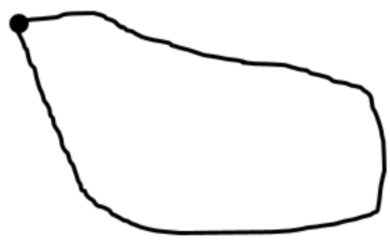


圖 7 有幾個多邊形?

答案是一個，或者兩個，需看外包的多邊形是否計算在內。這是什麼意思呢?想像圖 7 是在一個球體上，割下這塊多邊形後，剩下的是不是也是一個多邊形呢?如果是，則有兩個，否則只有一個。

現在可以進行圖 1 的討論了，如果假設三邊形與三角形是同義的，由於並無明確節點與邊的定義，該圖形沒有任何三角形，最外圍的邊界內有許多邊，但是所有線段最外圍包絡構成一個成三角形狀的多邊形，所以扣除這個圖形後，有一個外包三角形，或是「餘」三角形。如果延用圖 8 的討論，而圖形外的不算，則此命題沒有三角形。否則，計算外包，則有一個。

若引用圖 6，讓所有交點均為節點，其間的線段均為「邊」，則有 5 個三角形，若包含外包的則有 6 個，如圖 8 所示，其中 1-5 為同一類三角形，6 為外包三角形。該圖形除外包的以外，有 5 個三邊形，4 個四邊形。

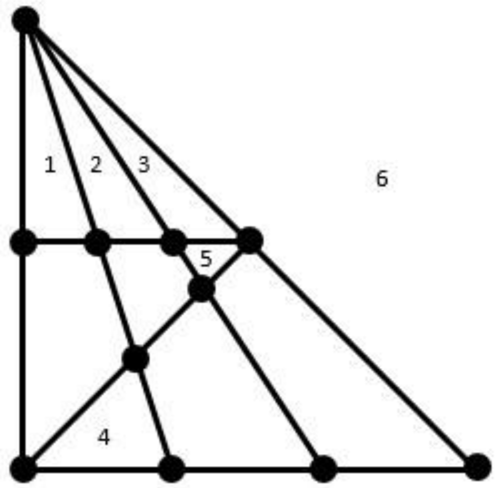


圖 8、三角形數目，位相觀點

基礎的位向分析，包涵建構兩個矩陣：鄰接矩陣(Adjacency Matrix)與關聯矩陣(Incidence Matrix)(Chang, 2014)。若引用圖 6，則該圖形之兩個矩陣如表一、二。鄰接矩陣，陳述的是節點與節點間之關係，其維度是(節點數，節點數)(Wikipedia, 2015a)，故圖 6 之鄰接矩陣之維度是(11, 11)。關聯矩陣，則陳述節點與邊的關係。由於圖 6 沒有標明方向，為無方向之圖(undirected graph)，故鄰接矩陣為對稱矩陣。關聯矩陣亦只有端點關係，而非起點與終點。

關聯矩陣維度是(節點數，邊數)，故圖 6 之關聯矩陣的維度是(11, 19)。Chang (2014)中的關聯矩陣範例是如此安排的，如同表二所呈現。但是，文獻裡關聯矩陣也有定義為上述之轉置矩陣(Transpose)的(Wolfram, 2015)，亦即矩陣行(row)數為邊數、列(column)數為節點數。

就圖論而言，邊與節點是兩類物件(Object)，利用邊與邊的關係，可以建構「線圖」(Line Graph)。其詳細是，「線圖」中的「點」是原圖中的邊，「線圖」中兩點相連，若且唯若它們在原圖中所表示的邊是有共用節點的。如果有一個圖表示為 G，習慣上其線圖記為 L(G) (Wikipedia, 2015b)，則 L(G)之鄰接矩陣(記為 L)與圖 G 之關聯矩陣(記為 C)之間的關係為：

$$\mathrm{L} = \mathrm{C}^T\mathrm{C} - 2\mathrm{I}$$

以圖 6 而言，L 之維度為(19, 19)，$\mathrm{C}^T\mathrm{C}$之維度亦為(19, 19)。

這兩個矩陣除表達該圖(Graph)之定義外，還有分析的功能。例如，鄰接矩陣(記為 A)表現的是兩個節點間一階段連接的數目，由表一可見，其元素只有 0 與 1。因此，兩點間最多只有一個直接連接。鄰接矩陣之平方(A^2)，展現兩節點間兩段式連接的路徑數目；鄰接矩陣之立方(A^3)，展現兩節點間三段式連接的路徑數目。由於圖 6 之圖形有 11 個節點，維數較大，較不適合於在本文中演練，謹引用 Daddel (2000) 之圖例，並略為衍化，做為說明，繪製如圖 9。圖 9 左為具方向性者，為有方向之圖(directed graph)，圖 9 右為不具方向性者。對圖 9 左， 兩階段連接的只有P_1至P_3，

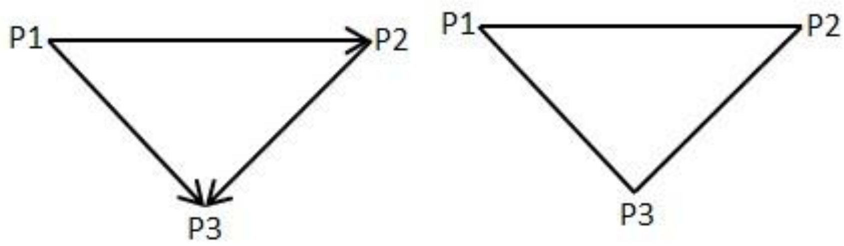
圖 9 右則可以有多種途徑，例如由P_1至P_1，可以由P_1至P_2再回到P_1，也可以P_1至P_3至P_1，故A^2對角線元素，均為 2。

表一：鄰接矩陣

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0

表二：關聯矩陣

	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{bmatrix}$$

圖 9：鄰接矩陣應用例，三邊形

關聯矩陣(C)之使用，在「地理資訊系統」中最直接的便是判斷「邊」是否存在，亦即兩個節點是否相連。其矩陣形態亦十分有利於後續分析與維護，如流向(Flow)分析、以頻譜圖論(Spectral Graph Theory; Wikipedia, 2015c)分析、增、刪、等。

五、結 語

本文之目的，不是在進行嚴謹數學理論的推演，而是指出本圖形遊戲答案的關鍵議題在於所使用之「定義」。經過以上的討論，「有幾個三角形?」圖形遊戲的答案有 24 個或 46 個，由是否包含「零面積」三角形而定。若由位相的觀點，有 5 個或 6 個三角形，由是否計數外包的三角形而定。當然，在圖論中，聯結兩點的「連接」(「邊」、「弧」)，並非限定為直線段。這也是為什麼在以位相角度討論時，要假定三邊形等同三角形。

同時需要敘明的是，有些圖論論文中採用「多邊形可以重疊(Overlap)」(陳秋媛，2015；個人通訊)，雖然並非「地理資訊系統」裡所習用，但是更彰顯「定義」之重要性。

致 謝

本文之寫作動機，起源於交通大學土木工程學系楊錦釧教授提出的一項討論，謹此致謝。寫作過程中曾蒙交通大學應用數學系陳秋媛教授不厭其煩地耐心指正，讓本人知識多所增長，更謹此敬表謝意。陳秋媛教授於 88、90、102 學年度共獲得三次傑出教學獎，為交通大學榮譽教學教師(交通大學理學院，2014)。本次請益，得以見證陳教授之熱心教學與專業素養，深以為幸。同時，謹此向開南大學張康聰教授表達謝意，除本文曾蒙張教授指正外，張教授所著地理資訊系統教科書，對普及與深化相關教學貢獻卓著，本人受益良多。本人對數學遊戲素無專長，編寫此文除因楊錦釧教

授所引發外，目的在提供「地理資訊系統」課程教學時之參考。

參考文獻

1. 史天元，1995。圖解平面圖中 Euler 等式。地籍測量，14(2):15-20。
2. 交通大學理學院，2014。恭賀：陳秋媛教授榮獲三次傑出教學獎，http://science.nctu.edu.tw/app/news.php?Sn=106，前次查訪： 2015.04.03。
3. 維基百科，2015。圖論，http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%BE%E8%AE%BA，前次查訪： 2015.03.26。
4. Chang, K.T., 2014. Introduction to Geographic Information Systems, 7th ed., McGrawHill Companies.
5. Daddel, Ali A., 2000. Adjacency matrix (vertex matrix), https://www.math.ucdavis.edu/~daddel/linear_algebra_appl/Applications/GraphTheory/GraphTheory_9_17/node9.html, last accessed on 2015.03.29.
6. Laurini, R., and D. Thompson, 1994. Fundamentals of Spatial Information Systems, the APIC Series, Academic Press Limited, London.
7. Street, A. P. & W. P. Wallis, 1982. Combinatorics：A First Course. The Charles Babbage Research Centre.
8. Wikipedia, 2015a. Incidence Matrix, http://en.wikipedia.org/wiki/Incidence_matrix, last accessed on 2015.03.31.
9. Wikipedia, 2015b. Line Graph, http://en.wikipedia.org/wiki/Line_graph, last accessed on 2015.03.31.
10. Wikipedia, 2015c. Spectral Graph Theory, http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_graph_theory, last accessed on 2015.03.30.
11. Wolfram, 2015. Incidence Matrix, http://mathworld.wolfram.com/IncidenceMatrix.html, last accessed on 2015.03.29.